2 سلك باكالوريا	المتتاليات العددية	ذ. راجي نور الدين

تعريف: المتتاليات العددية هي تطبيق من I إلى IR حيث I جزء من IR نكتب $\begin{array}{l} u: I \to \mathbb{R} \\ n \to u(n) \end{array}$ نرمز
لصورة n ب u_n بدلا من $u(n)$ ونرمز للمتتالية ب $(u_n)_{n\in I}$ بدلا من u . u_n يسمى الحد العام للمتتالية .

أمثلة: $n\in IN$ $u_n=2n$ $v_n=\sin\frac{n\pi}{3}$ $w_n=1+2+3+4+5+.....+n$

تساوي متتاليتين: $(u_n)_{n\in I}$ و$(v_n)_{n\in I}$ متتاليتين متساويتين إذا وفقط إذا كان $u_n=v_n$ لكل n من I .

المتتاليات المكبورة:و المصغورة

*تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي M بحيث $u_n\le M$ لكل n من I .

*تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي m بحيث $u_n\ge m$ لكل n من I .

أمثلة: بين أن $(u_n)_{n\in IN}$ مصغورة و $(v_n)_{n\in IN}$ مكبورة حيث : $u_n=2n+5$ و $v_n=-2n+5$

المتتالية المحدودة: تكون كذلك إذا وفقط إذا كانت مكبورة و مصغورة.

مثال: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ بحيث $u_n=\frac{1}{n^2}$ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ محدودة.

المتتالية الرتبة:

*تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\ge u_n$ لكل n من I .

*تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$ لكل n من I .

المتتالية الحسابية: تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث: $\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$
لكل $n\ge n_0$ العدد r يسمى أساس المتتالية.

مثال نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي: $u_n=2n-1$ بين أن المتتالية حسابية أساسها r=1.

خاصية مميزة: (u_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $\boxed{u_n=\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}}$ لكل $n\ge1$

خاصية: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r فان : $u_n=u_0+nr$

مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

(u_n) متتالية حسابية إذا كان: $s_n=u_0+u_1+.......+u_{n-1}$ فان: $\boxed{s_n=\frac{n}{2}(u_0+u_{n-1})}$ n عدد حدود المجموع.

المتتالية الهندسية: تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث: $\boxed{u_{n+1}=qu_n}$
لكل $n\ge n_0$ العدد q يسمى أساس المتتالية

مثال: $w_n=2^n$ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 .

خاصية مميزة:

(u_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $u_{n-1}.u_{n+1}=u_n^2$ لكل $n\ge1$

خاصية: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q فان : $\boxed{u_n=u_0q^n}$

مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q ولتكن $s_n=u_0+u_1+.......+u_{n-1}$

إذا كان q≠1: فان: $\boxed{s_n=u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)}$ و إذا كان q=1: فان: $s_n=nu_0$

تطبيقات

تطبيق1:
بين أن $u_n=v_n$ لكل n من IN حيث $u_n=(-1)^n$ و $v_n=\cos n\pi$

تطبيق2:
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{u_n^3}{1+u_n^2} \quad n\in IN \end{cases}$

1-بين أن : $(\forall n\in IN)\ u_n\ge 0$

2-بين أن : $(\forall n\in IN)\quad u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

تطبيق3:
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0\succ 0 \\ u_{n+1}=\frac{u_n}{2+u_n^2} \end{cases}$

1-بين أن : $(\forall n\in IN)\ u_n\succ 0$

2-بين أن $(u_n)_{n\in IN}$ تناقصية.

2-بين أن : $(\forall n\in IN)\quad u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

تطبيق4:
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0=\frac{3}{2} \\ (\forall n\in IN)\ u_{n+1}=\frac{(u_n+1)^2}{4u_n} \end{cases}$

1-بين بالترجع أن: $(\forall n\in IN)\ u_n\succ 1$

2-أ-تحقق من أن: $(\forall n\in IN)\ \frac{u_n-1}{4}-(u_{n+1}-1)=\frac{u_n-1}{4u_n}$

ب-استنتج أن: $$(\forall n\in IN)\ \ (u_{n+1}-1)=\frac{(u_n-1)^2}{4u_n}$$

ج-بين أن: $(\forall n\in IN)\ u_n-1\prec\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Tel 0668381863
nraji2005@hotmail.fr